第 9 章　平面向量

9.1　向量概念

1. BD　【解析】对于 A，若 $|\boldsymbol{a}|=0$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，故 A 正确；对于 B，向量不能比较大小，故 B 不正确；对于 C，方向相同或相反的两个非零向量为共线向量，故 C 正确；对于 D，因为 x 轴、y 轴只有方向没有大小，所以都不是向量，故 D 不正确. 故选 BD.

2. B　【解析】若向量 $\boldsymbol{a}$ 为零向量，则 $|-\boldsymbol{0}|=0$，A 错误；模为 0 的向量为零向量，零向量的方向是任意的，B 正确；有向线段是向量的几何表示，是个图形，而向量是既有大小又有方向的量，不是有向线段，C 错误；任意两个单位向量的长度相等，但方向不一定相同，D 错误.

3. BD　【解析】对于 A，向量是具有方向的量，若 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，则向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的大小一样，方向不确定，不一定共线，故 A 错误；

对于 B，若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，则一定有 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，故 B 正确；

对于 C，若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，则只能说明非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共线，当长度不同或方向相反时，都有 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{b}$，故 C 错误；

对于 D，若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共线且方向相同，所以 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，故 D 正确.

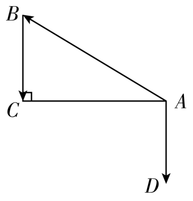
故选 BD.

4. B　【解析】因为 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ 的起点相同，所以 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ 的夹角即为角 A，大小是 $\frac{\pi}{3}$. 故选 B.

5. D　【解析】因为在四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，所以四边形 $ABCD$ 为平行四边形，故 $\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OD}$，$\overrightarrow{AC}\neq\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC}$. 故选 D.

6. C　【解析】如图，作向量 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$，

则$\angle BAD$是$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{BC}$的夹角.



在$\triangle ABC$中,因为$C=90°$,$BC=\frac{1}{2}AB$,

所以$\angle ABC=60°$,所以$\angle BAD=120°$.

故选 C.

7. B 【解析】因为点O是正三角形ABC的中心,所以$\overrightarrow{AO}$,$\overrightarrow{OB}$,$\overrightarrow{OC}$是模相等的向量,故 B 正确;

向量$\overrightarrow{AO}$的起点是点A,$\overrightarrow{OB}$,$\overrightarrow{OC}$的起点是O,故 A 错误;

这三个向量方向不同,不是共线向量也不是相等向量,故 C,D 错误. 故选 B.

8. A 【解析】若四边形$ABCD$是平行四边形,则$AB\parallel DC$,$AB=DC$,所以$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$;

若$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$,则$AB\parallel DC$,$AB=DC$,则四边形$ABCD$是平行四边形.

所以“四边形$ABCD$是平行四边形”是“$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$”的充要条件. 故选 A.

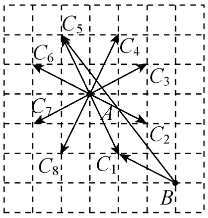
9. (1) $\overrightarrow{GB}$, $\overrightarrow{LE}$, $\overrightarrow{EC'}$ (2) $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{FB}$, $\overrightarrow{HA'}$, $\overrightarrow{HK}$, $\overrightarrow{KB'}$

【解析】由已知可得,向量相反⇔向量方向相反且模相等.

共线向量⇔表示向量的有向线段所在的直线平行或重合.

10. $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ 【解析】根据题意,在正三角形ABC中,有向线段$\overrightarrow{AD}$的长度最小时,AD与BC垂直,则有向线段$\overrightarrow{AD}$长度的最小值为正三角形ABC的高,即$\frac{5\sqrt{3}}{2}$.

11. 【解】(1)画出所有满足条件的向量$\overrightarrow{AC}$,如图所示.



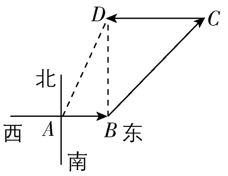
(2)由(1)所画的图知，

①当点 C 位于点 C_1 或 C_2 时，$|\overrightarrow{BC}|$ 取得最小值 $\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$；

②当点 C 位于点 C_5 或 C_6 时，$|\overrightarrow{BC}|$ 取得最大值 $\sqrt{4^2+5^2}=\sqrt{41}$.

所以 $|\overrightarrow{BC}|$ 的最大值为 $\sqrt{41}$，最小值为 $\sqrt{5}$.

12.【解】(1)作出向量 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CD}$，如图所示.



(2)连接 AD，BD. 由题意得，$\triangle BCD$ 是直角三角形，其中 $\angle BDC=90°$，$BC=10\sqrt{2}$ 米，$CD=10$ 米，所以 $BD=10$ 米. 易得 $\triangle ABD$ 是直角三角形，其中 $\angle ABD=90°$，$AB=5$ 米，所以 $AD=\sqrt{5^2+10^2}=5\sqrt{5}$(米). 所以 $|\overrightarrow{AD}|=5\sqrt{5}$.

13. B 【解析】对于 A，若 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 都是单位向量，则 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$，但是 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的方向不确定，故 A 不正确；

对于 B，因为 $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$，故向量 $\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{BA}$，故 B 正确；

对于 C，若 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$，则 A，B，C，D 四点构成平行四边形或 A，B，C，D 四点共线，故 C 不正确；

对于 D，两向量相等的充要条件是它们的大小和方向相同，与向量的起点与终点位置无关，故 D 不正确. 故选 B.

9.2 向量运算

9.2.1 向量的加减法

1. ACD 【解析】$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$，A 正确；

$\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$，B

错误；$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$，C 正确；$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}=\mathbf{0}$，D 正确.

故选 ACD.

2. BCD 【解析】对于 A，$\overrightarrow{AB}-(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BA}=2\overrightarrow{AB}$，A 错误；

对于 B，$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DC}=\mathbf{0}$，B 正确；

对于 C，$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AD}=\mathbf{0}$，C 正确；

对于 D，$\overrightarrow{NO}+\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PN}=\mathbf{0}$，D 正确. 故选 BCD.

3. AD 【解析】$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$，则 A 正确；

$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MB})+(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{MB}$，B 错误；

$(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{AD})-\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{MB}$，C 错误；

$(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$，则 D 正确. 故选 AD.

4. A 【解析】①当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线时成立；

②当 $\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$ 时成立；

③当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，方向相反，且 $|\boldsymbol{a}|\geq|\boldsymbol{b}|$ 时成立；

④当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，方向相同，且 $|\boldsymbol{a}|\geq|\boldsymbol{b}|$ 时成立.

5. 120° 【解析】因为 $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DB}$，所以由向量的加法的几何意义可知四边形 $ABCD$ 是平行四边形. 又因为 $DA=DB=DC$，所以四边形 $ABCD$ 是菱形，且 $\angle DAB=60°$，所以 $\angle ABC=120°$.

6. $\boldsymbol{b}_6$（答案不唯一） 【解析】由题图可知，$\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_5+\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{b}_5+\boldsymbol{b}_7=\overrightarrow{A_2A_3}+\overrightarrow{A_5A_6}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_5}+\overrightarrow{OA_7}=(\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{A_2A_3})+(\overrightarrow{OA_5}+\overrightarrow{A_5A_6})+\overrightarrow{OA_7}=\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{OA_6}+\overrightarrow{OA_7}=\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{OA_6}-\overrightarrow{OA_3}=\overrightarrow{OA_6}=\boldsymbol{b}_6$.

7. D 【解析】因为 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$，所以 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$，

即 $AD=BC$ 且 $AD/\!/BC$，所以四边形

$ABCD$ 的一组对边平行且相等,所以四边形 $ABCD$ 是平行四边形. 故选 D.

8. AD 【解析】对于 A,连接 BE,CF(图略),$\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{BE}$,$\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CF}$,由正六边形的性质可知 $|\overrightarrow{BE}|=|\overrightarrow{CF}|$,即 $|\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{BC}|$,故 A 正确;

对于 B,连接 AE,BD(图略),$\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{AE}$,$\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DB}$,在正六边形 $ABCDEF$ 中,易知 $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BD}$,所以 $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FE}=-(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD})$,故 B 错误;

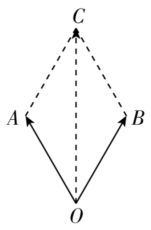
对于 C,根据平行四边形法则有 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$,与 $\overrightarrow{CB}$ 共线但方向相反,故 C 错误;

对于 D,由 C 选项分析知,$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}$ 与 $\overrightarrow{AD}$ 是平行向量,故 D 正确.

故选 AD.

9. A 【解析】(提示:用向量 $\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OB}$ 表示两只胳膊的拉力,它们的合力与重力大小相等,求出 $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|$,再化为体重即可得解)如图,$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=300$,$\angle AOB=60°$,以 OA,OB 为邻边作平行四边形 $OACB$,则四边形 $OACB$ 是菱形. 连接 OC,因为 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$,所以 $|\overrightarrow{OC}|=2|\overrightarrow{OA}|\cdot\cos 30°=300\sqrt{3}$,

因此该学生体重为 $\frac{300\sqrt{3}}{10}\approx\frac{300\times1.732}{10}\approx52(\mathrm{kg})$. 故选 A.

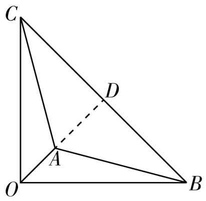


10. B 【解析】如图所示,设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{OC}=-\boldsymbol{c}$,由 $\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{c}$,$|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=\sqrt{2}$,得 $\triangle OBC$ 是腰长为 $\sqrt{2}$ 的等腰直角三角形,则 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}|=|\overrightarrow{BA}|+|\overrightarrow{OA}|+|\overrightarrow{CA}|$,而 $\triangle OBC$ 的所有内角均小于 120°,

因此$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}|$取得最小值时，点 A 是$\triangle OBC$ 的“费马点”，

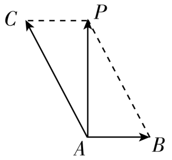
$\angle BAC=\angle OAC=\angle OAB=120°$，则 $AB=AC$，点 A 在斜边 BC 的中线上，

连接 AD，



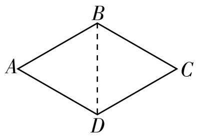
则$\angle BAD=60°$，$\angle ABD=30°$，$AC=AB=2AD=BC\tan 30°=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$AO=OD-AD=1-\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}|$的最小值为$\frac{2\sqrt{3}}{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3}+1-\frac{\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}+1$. 故选 B.

11. $4\sqrt{5}$　【解析】如图，$\overrightarrow{AB}$代表水流速度，$\overrightarrow{AC}$代表船自身航行的速度，$\overrightarrow{AP}$代表船实际航行的速度，所以有$|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BP}|=\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AP}|^2}=\sqrt{4^2+8^2}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$，所以船自身航行速度的大小为$4\sqrt{5}$ km/h.

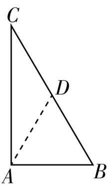


12. 1　【解析】如图，连接 BD，因为四边形 $ABCD$ 为菱形，$\angle ABC=120°$，$|\overrightarrow{AB}|=1$，

所以$\triangle ABD$ 是边长为 1 的等边三角形，所以$|\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{DC}|=|\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}|=|\overrightarrow{BD}|=1$.



13. 直角三角形　【解析】如图，取 BC 中点 D，连接 AD，因为$|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}|=|(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})|$，所以$|\overrightarrow{CB}|=|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=|2\overrightarrow{AD}|=2|\overrightarrow{AD}|$，即 $AD=DB=DC$，所以



$\angle DAB=\angle DBA$, $\angle DAC=\angle DCA$, 又 $\angle BAC=\angle DAB+\angle DAC=\angle ABC+\angle ACB$, 三角形内角和为 $180°$, 所以 $\angle BAC=90°$, 所以 $\triangle ABC$ 为直角三角形.

14. [1,3] 【解析】由两向量和与差的三角不等式,可得 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\geq||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||=1$,

当且仅当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 反向时,等号成立,

$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leq|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|=3$, 当且仅当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 同向时,等号成立,

综上所述, $1\leq|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leq3$.

故答案为[1,3].

15. 2 【解析】以 AB,AC 为邻边作平行四边形 $ACDB$,如图所示.

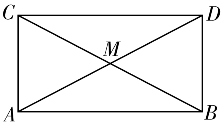
由向量加、减法的几何意义,可知 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$.

因为 $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|$,

所以 $|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{CB}|$.

又 $|\overrightarrow{BC}|=4$, 且 M 为线段 BC 的中点,

所以 $|\overrightarrow{AM}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AD}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|=2$.



16. 【证明】$\because$ $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{DC}$,

又 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{FD}=\overrightarrow{BE}$,

$\therefore$ $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{FC}$, 即 AE 与 FC 平行且相等.

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是平行四边形.

9.2.2 向量的数乘

1. D 【解析】对于 A, 当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 时, $\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ 没有意义,错误. 对于 B,C,D, 当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 时,选项 B,C,D 都正确;当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时,由 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{e}$ 可知, $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 同向或反向,且 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{e}|=|\boldsymbol{a}|$, 故 B,C 不全面. 故选 D.

2. A 【解析】因为 D 是线段 BC 的中点, E 是线段 AD 上靠近 A 的三等分点,所以 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{6}\overrightarrow{BC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$,

所以 $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BA}+\frac{1}{6}\overrightarrow{BC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{6}\overrightarrow{BC}$. 故选 A.

3. B 【解析】因为向量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2$，所以 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{e}_1+5\boldsymbol{e}_2$. 又 $4\boldsymbol{e}_1+10\boldsymbol{e}_2=2(2\boldsymbol{e}_1+5\boldsymbol{e}_2)$，所以 B 选项与 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 共线. 故选 B.

4. A 【解析】$\because$ D 是 AB 的中点，

$\therefore \overrightarrow{DA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$.

$\because$ F 在 AC 上且 $\overrightarrow{AF}+2\overrightarrow{CF}=\mathbf{0}$，

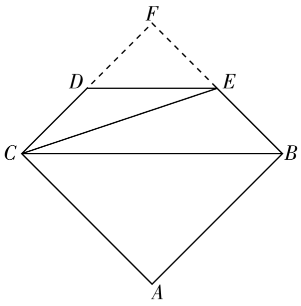
$\therefore \overrightarrow{AF}+2(\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AC})=\mathbf{0}$，$\therefore \overrightarrow{AF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

$\therefore \overrightarrow{DF}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})+\frac{2}{3}\boldsymbol{b}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{6}\boldsymbol{b}$. 故选 A.

5. C 【解析】如图，延长 CD 和 BE 交于点 F，由题得 $\angle A=\angle F=\angle FCA=\angle FBA=90°$，所以四边形 $ABFC$ 为矩形.

又 $AB=AC$，所以四边形 $ABFC$ 为正方形.

又 $BC=2DE$，所以 D，E 分别是 CF，BF 的中点，所以 $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CD}$. 故选 C.



6. 【解】(1) $\frac{2}{3}\left[\frac{1}{2}(2\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b})-(4\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\right]=\frac{2}{3}[(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})-(4\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})]=\frac{2}{3}(3\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{a})=2\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}$.

(2) 因为 $3(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a})+2(\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{a})-4(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}+$

$\boldsymbol{b})=\boldsymbol{x}+3\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$,所以 $\boldsymbol{x}=4\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{a}$.

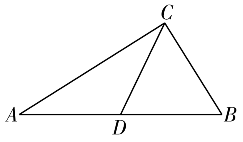
7.【证明】$\because \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})+(2\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})=3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BC}$,即 $AD\underline{\parallel}BC$,$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

8. D 【解析】由题意,$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{AC}=4\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}$,不存在唯一的实数 μ 使得 $\overrightarrow{AB}=\mu\overrightarrow{AC}$,所以 A,B,C 三点不共线,故 A 错误;

由于 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=4\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})=3\boldsymbol{a}-6\boldsymbol{b}$,所以 $\overrightarrow{BC}=-3\overrightarrow{CD}$,则 B,C,D 三点共线,故 D 正确;

由于 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{a}-6\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$,不存在唯一的实数 λ 使得 $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AD}$,不存在唯一的实数 t 使得 $\overrightarrow{AC}=t\overrightarrow{AD}$,故 B,C 错误. 故选 D.

9. A 【解析】因为 $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AD}$,所以 D 是线段 AB 的中点,

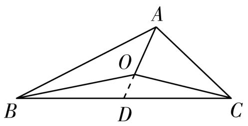


又因为 $|\overrightarrow{AB}|=2|\overrightarrow{CD}|$,

所以 $|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{BD}|=|\overrightarrow{CD}|$,可知 $\angle ACB=90°$,则 $\triangle ABC$ 的形状一定为直角三角形. 故选 A.

10. AD 【解析】如图①,取 BC 的中点 D,连接 OD,则 $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OD}$,

若 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{0}$,则 $2\overrightarrow{OD}=-\overrightarrow{OA}$,所以 O,A,D 三点共线,且 $2|\overrightarrow{OD}|=|\overrightarrow{OA}|$,则 O 为 $\triangle ABC$ 的重心,故 A 正确;

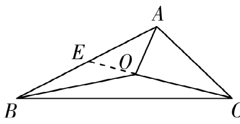


图①

若 $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|$,则 O 为 $\triangle ABC$ 的外心,不一定是内心,故 B 错误;

若 O 为 $\triangle ABC$ 的重心,AD 是 BC 边上的中线,则 $\overrightarrow{AO}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}$,即 $3\overrightarrow{AO}=2\overrightarrow{AD}$,故 C 错误;

如图②，取 AB 的中点 E，连接 OE，则 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OE}$，



图②

若 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{CO}$，则 $\overrightarrow{CO}=2\overrightarrow{OE}$，则 O，C，E 三点共线，且 $|\overrightarrow{OE}|=\dfrac{1}{3}|\overrightarrow{CE}|$，

则 $S_{\triangle AOB}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle ABC}$，故 D 正确. 故选 AD.

11. -4 【解析】由题意知，$k\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=\lambda(8\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b})(\lambda\in\mathbf{R},\lambda<0)$，

$\therefore (k-8\lambda)\boldsymbol{a}+(2-\lambda k)\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$，又 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是两个不共线的非零向量，

$\therefore \begin{cases}k-8\lambda=0,\\2-\lambda k=0,\end{cases}\therefore \lambda=-\dfrac{1}{2}, k=-4.$

12. $\dfrac{14}{3}$ 【解析】$\because \overrightarrow{AM}=a\overrightarrow{AE}+(6-2a)\overrightarrow{AF}$，$E$，$F$，$G$ 分别为边 BC，CD，DA 的中点，

$\therefore \overrightarrow{AM}=a(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AG})+(6-2a)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AG}\right)=3\overrightarrow{AB}+(12-3a)\overrightarrow{AG}.$

$\because B$，M，G 三点共线，

$\therefore 3+12-3a=1$，解得 $a=\dfrac{14}{3}$.

13. 12 【解析】因为 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{AB}$，所以 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=2(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PB})$，即 $3\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{BC}$. 所以 $\overrightarrow{AP}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 平行且方向相同. 因为 $3|\overrightarrow{AP}|=|\overrightarrow{BC}|$，$S_{\triangle PAB}=4$，设 $\triangle ABC$ 中边 BC 上的高为 h，所以

$\dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle PAB}}=\dfrac{\frac{1}{2}\cdot|\overrightarrow{BC}|\cdot h}{\frac{1}{2}\cdot|\overrightarrow{AP}|\cdot h}=\dfrac{|\overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{AP}|}=3$，即

$S_{\triangle ABC}=3S_{\triangle PAB}=3\times4=12$. 所以 $\triangle ABC$ 的面积为 12.

14. (1)【解】$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}.$

$\overrightarrow{EF}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{EC}=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}$，

$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EF}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$.

$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$.

$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG}=\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$.

(2)【证明】因为 $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$,所以 $\overrightarrow{AF}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AG}$. 又 $\overrightarrow{AF}$,$\overrightarrow{AG}$ 有公共点 A,故 A,F,G 三点共线.

15. D 【解析】取 AB 的中点 D,连接 OD,CD,则 $2\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$,

$\because \overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}[(1-\lambda)\overrightarrow{OA}+(1-\lambda)\overrightarrow{OB}+(1+2\lambda)\overrightarrow{OC}]$,

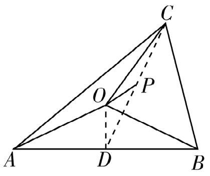
$\therefore \overrightarrow{OP}=\frac{2(1-\lambda)}{3}\overrightarrow{OD}+\frac{1+2\lambda}{3}\overrightarrow{OC}=\frac{2-2\lambda}{3}\cdot(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CD})+\frac{1+2\lambda}{3}\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}+\frac{2-2\lambda}{3}\overrightarrow{CD}$,

则 $\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OC}=\frac{2-2\lambda}{3}\overrightarrow{CD}$,即 $\overrightarrow{CP}=\frac{2-2\lambda}{3}\overrightarrow{CD}$,$\therefore \overrightarrow{CP}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 共线且有公共点 C,

$\therefore P,C,D$ 三点共线,

$\because \lambda\neq0$,$\therefore \overrightarrow{CP}\neq\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$,

$\therefore$ 点 P 的轨迹一定通过 AB 边的中点.



9.2.3 向量的数量积

1. C 【解析】由题意,$|\boldsymbol{a}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2=9$,$|\boldsymbol{a}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2=4$,两式作差可得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{5}{4}$. 故选 C.

2. D 【解析】因为 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})=0$,可得 $\boldsymbol{a}^2+3\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-\frac{1}{3}$,

则向量 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为

$\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}\boldsymbol{b}=\dfrac{-\frac{1}{3}}{1}\boldsymbol{b}=-\dfrac{1}{3}\boldsymbol{b}$. 故选 D.

3. C 【解析】设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ $(\theta\in[0,\pi])$，因为 $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$，所以 $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=0$，所以 $\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，得 $|\boldsymbol{a}|^2+2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cdot\cos\theta=0$.

因为非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，所以 $\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$.

因为 $\theta\in[0,\pi]$，所以 $\theta=\dfrac{2\pi}{3}$，故选 C.

4. B 【解析】由 D 是边 BC 的中点，可得 $\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$.

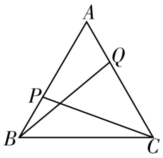
$\because$ E 是 $\triangle ABC$ 的外接圆的圆心，

$\therefore$ $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AE}||\overrightarrow{AB}|\cos\angle BAE=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2=\dfrac{1}{2}\times4^2=8$（提示：$\triangle ABE$ 为等腰三角形）.

同理可得 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|^2=18$，

$\therefore$ $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{2}\times8+\dfrac{1}{2}\times18=13$. 故选 B.

5. C 【解析】由题意可知，$\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AB}=(1-\lambda)\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$.



又因为 $\triangle ABC$ 为等边三角形，$AB=2$，所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times2\times\dfrac{1}{2}=2$，

所以 $\overrightarrow{BQ}\cdot\overrightarrow{CP}=[(1-\lambda)\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}]\cdot(\lambda\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=\lambda(1-\lambda)\times2-4\lambda-4(1-\lambda)+2=-\dfrac{3}{2}$，

解得 $\lambda=\dfrac{1}{2}$，故选 C.

6. $\left(-\infty,\dfrac{-13-\sqrt{133}}{6}\right)\cup\left(\dfrac{\sqrt{133}-13}{6},\right.$

$1\Big)\cup(1,+\infty)$ 【解析】由题意可知

$a\cdot b=|a||b|\cos 60°=2\times3\times\frac{1}{2}=3.$

于是$(a+\lambda b)\cdot(\lambda a+b)=\lambda a^2+(\lambda^2+1)a\cdot b+\lambda b^2=3\lambda^2+13\lambda+3.$

$\because a+\lambda b$ 与 $\lambda a+b$ 的夹角为锐角,

$\therefore 3\lambda^2+13\lambda+3>0$,

解得 $\lambda>\frac{\sqrt{133}-13}{6}$或 $\lambda<\frac{-13-\sqrt{133}}{6}$.

当 $\lambda=1$ 时,$a+\lambda b$ 与 $\lambda a+b$ 共线,其夹角为 0°,不符合题意,故实数 λ 的取值范围是 $\left(-\infty,\frac{-13-\sqrt{133}}{6}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{133}-13}{6},1\right)\cup(1,+\infty)$.

7. 4　8 【解析】如图,取 BC 中点 E,连接 AE.

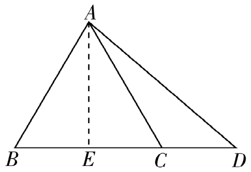
因为$\triangle ABC$ 是等边三角形,点 D 在 BC 的延长线上,且 $\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{CD}$,

所以 $AE\perp BC$, $BE=EC=CD=\frac{1}{2}AB$,

$AE=\frac{\sqrt{3}}{2}AB$,所以在 Rt$\triangle AED$ 中,$AE^2+ED^2=AD^2$,即$\frac{3}{4}AB^2+AB^2=28$,

解得 $AB=4$.

所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=4\times4\times\cos 60°+4\times4\times\cos(180°-60°)+4\times4\times\cos 60°=8.$



8. 【解】因为$|c|=2|a|$,a,b 的夹角为锐角,c 为 b 在 a 上的投影向量,

所以 $c=2a$,则 $b+c-a=a+b$,$a\cdot b=\frac{1}{2}c\cdot b=\frac{1}{2}c^2=2.$

设$|b|=x(x>0)$,由题意可得$|a|=1$,

则$|a+b|=\sqrt{(a+b)^2}=\sqrt{5+x^2}$,$(a+b)\cdot b=2+x^2$,则 $\cos\theta=\frac{(a+b)\cdot b}{|a+b||b|}=$

$$\frac{2+x^2}{\sqrt{5+x^2}\cdot x}=\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}(2+x^2)}{\sqrt{5+x^2}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}x^2}}\geqslant$$

$$\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}(2+x^2)}{\frac{(5+x^2)+\frac{3}{2}x^2}{2}}=\frac{2\sqrt{6}}{5},$$

当且仅当 $5+x^2=\frac{3}{2}x^2$，即 $x=\sqrt{10}$ 时，

等号成立，

所以 $\cos\theta$ 的最小值为$\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

9. C 【解析】因为两个单位向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为$\frac{2\pi}{3}$，

所以$|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})^2}$

$=\sqrt{\boldsymbol{a}^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{b}^2}$

$=\sqrt{1+4\cos\frac{2\pi}{3}+4}$

$=\sqrt{1-2+4}=\sqrt{3}$. 故选 C.

10. D 【解析】因为$|\overrightarrow{AB}|=3$，$|\overrightarrow{AP}|=1$，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=6$，所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AP}|\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AP}\rangle-6\leqslant3\times1-6=-3$. 故选 D.

11. A 【解析】$\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-2\overrightarrow{OA}=(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$，所以由$(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-2\overrightarrow{OA})=0$ 得$(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=0$，即 $\overrightarrow{AB}^2=\overrightarrow{AC}^2$，所以$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|$，故$\triangle ABC$ 为等腰三角形.

12. D 【解析】显然$\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$，$\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$是与 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ 分别同向的单位向量，由

$\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)\cdot\overrightarrow{BC}=0$，

得 BC 边上的中线与 BC 垂直，于是 $AB=AC$，

而$\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\cdot\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=1\times1\times\cos\angle BAC=\frac{1}{2}$，即 $\cos\angle BAC=\frac{1}{2}$，

又 $\angle BAC\in(0,\pi)$,因此 $\angle BAC=\dfrac{\pi}{3}$,

所以 $\triangle ABC$ 是等边三角形.

13. D 【解析】$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AP}|\cos\angle PAB=2|\overrightarrow{AP}|\cos\angle PAB$,

所以当点 P 在点 C 处时,$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}$

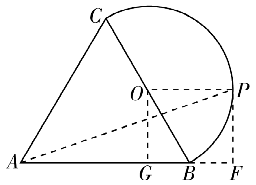
最小,最小值为 $2|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos\dfrac{\pi}{3}=$

$2\times2\times\dfrac{1}{2}=2.$

过圆心 O 作 $OP/\!/AB$ 交圆弧于点 P,连接 AP,此时 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}$ 最大,

过点 O 作 OG 垂直于 AB 于点 G,过点 P 作 PF 垂直于 AB 的延长线于点 F,

则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AF}|=|\overrightarrow{AB}|\cdot(|\overrightarrow{AG}|+|\overrightarrow{GF}|)=2\times\left(\dfrac{3}{2}+1\right)=5$,所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}$ 的取值范围为 $[2,5]$. 故选 D.



14. $\sqrt{30}+2$ 【解析】由 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c}|$,得 $\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{c}^2-4(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$,

整理得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$,则 $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4|=|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}|\leqslant2|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=2\sqrt{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}=2\sqrt{34+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}$,当且仅当 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 同向时取等号,则 $-2\sqrt{30}\leqslant\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\leqslant2\sqrt{30}$,

因此 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}=\sqrt{34-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}\leqslant\sqrt{34+4\sqrt{30}}=\sqrt{30}+2$,

所以 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 的最大值是 $\sqrt{30}+2$.

15. $\dfrac{1}{6}$　$\dfrac{13}{2}$ 【解析】$\because\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{BC}$,$\therefore AD/\!/BC$,$\therefore\angle BAD=180^\circ-\angle B=120^\circ$,

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AB}=\lambda|\overrightarrow{BC}|\cdot|\overrightarrow{AB}|\cdot$

$\cos 120° = \lambda \times 6 \times 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -9\lambda = -\frac{3}{2}$，解得 $\lambda = \frac{1}{6}$.

取 MN 的中点为 O，连接 DO（图略），根据极化恒等式，得 $\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{DN} = \frac{1}{4}[(2\overrightarrow{DO})^2 - \overrightarrow{MN}^2] = \overrightarrow{DO}^2 - \frac{1}{4}$，当 $|\overrightarrow{DO}|$ 取得最小值时，$\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{DN}$ 的值最小. ∵ 当 $DO \perp BC$ 时，$|\overrightarrow{DO}|$ 取得最小值，此时 $|\overrightarrow{DO}| = \frac{3\sqrt{3}}{2}$，

∴ $\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{DN}$ 的最小值为 $\frac{13}{2}$.

16.【解】（1）$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DC}$，

所以 $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD})$，

所以 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}^2 - \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AD})$，

又 $AB = 2AD = 2CD = 4$，$AB \parallel CD$，$\angle DAB = 90°$，

所以 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{EF} = \frac{1}{2} \times (0 + 2 \times 4 - 2^2 - 0) = 2$.

（2）由（1）知 $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{EC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{EC} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DC})$.

令 $\overrightarrow{EC} = \lambda\overrightarrow{DC}$ 且 $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$，则 $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} - (1-\lambda)\overrightarrow{DC}$，

$\overrightarrow{EF} = \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{DC} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD})$，

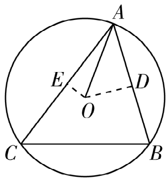
所以 $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EF} = \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} - (1-\lambda)\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{DC}^2 + \frac{1}{2}(\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}^2) - \frac{1-\lambda}{2}(\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AD}) = 4(\lambda - 1)\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) + 2 = 4\left(\lambda - \frac{1}{4}\right)^2 -$

$\frac{1}{4}$.

当 $\lambda=\frac{1}{4}$ 时，$\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EF}$ 取得最小值 $-\frac{1}{4}$；当 $\lambda=1$ 时，$\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EF}$ 取得最大值 2，则 $\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EF}$ 的取值范围为 $\left[-\frac{1}{4},2\right]$.

17. $\frac{2}{3}$ 或 $\frac{3}{4}$ 【解析】由题意可知点 O 是 $\triangle ABC$ 的外心，

分别取 AB，AC 的中点 D，E，连接 OD，OE，则 $OD\perp AB$，$OE\perp AC$，



则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AO}|\cdot\cos\angle BAO=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2=\frac{9}{2}$，同理可得 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}^2=8$.

因为 $\overrightarrow{AO}=\lambda\overrightarrow{AB}+\frac{1-\lambda}{2}\overrightarrow{AC}$，

所以 $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{1-\lambda}{2}\overrightarrow{AC}^2$，

可得 $8=12\lambda\cos\angle BAC+8(1-\lambda)$，

即 $\lambda(3\cos\angle BAC-2)=0$，

解得 $\cos\angle BAC=\frac{2}{3}$ 或 $\lambda=0$.

$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=\lambda\,\overrightarrow{AB}^2+\frac{1-\lambda}{2}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$，可得 $\frac{9}{2}=9\lambda+6(1-\lambda)\cos\angle BAC$.

若 $\cos\angle BAC=\frac{2}{3}$，解得 $\lambda=\frac{1}{10}$；

若 $\lambda=0$，解得 $\cos\angle BAC=\frac{3}{4}$.

综上所述，$\cos\angle BAC=\frac{2}{3}$ 或 $\frac{3}{4}$.

9.3 向量基本定理及坐标表示

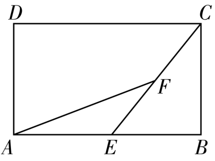
9.3.1 平面向量基本定理

1. CD 【解析】因为 $2\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，

$-2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=-(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，所以选项 A，B 中的向量不能作为一组基底. 因为向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不共线，所以 $3\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 不共线，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 不共线，所以选项 C，D 中的向量可以作为一组基底. 故选 CD.

2. B 【解析】根据向量共线的充要条件，可知集合 $A=\{$与 $\boldsymbol{y}$ 共线的所有向量$\}$. 根据平面向量基本定理，可知集合 $B=\{$平面内所有向量$\}$，所以集合 A 是集合 B 的子集. 故选 B.

3. C 【解析】如图，$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{EC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BE})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\frac{3}{4}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$. 故选 C.



4. D 【解析】设线段 $A_0A_{2\,025}$ 的中点为 A，

则 $\overrightarrow{OA_0}+\overrightarrow{OA_{2\,025}}=2\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_{2\,024}}=\overrightarrow{OA_i}+\overrightarrow{OA_{2\,025-i}}(i\in[0,2\,025])$，

所以 $\overrightarrow{OA_0}+\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_{2\,025}}=\frac{2\,025+1}{2}\times2\overrightarrow{OA}=1\,013(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

5. AC 【解析】$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，A 正确，B 错误；

因为 $\overrightarrow{AB}=m\overrightarrow{AM}$，$\overrightarrow{AC}=n\overrightarrow{AN}$，所以 $\overrightarrow{AO}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{2m}{3}\overrightarrow{AM}+\frac{n}{3}\cdot\overrightarrow{AN}$. 又因为 M，O，N 三点共线，所以$\frac{2}{3}m+\frac{1}{3}n=1$，故 $2m+n=3$，C 正确，D 错误. 故选 AC.

6. D 【解析】因为点 F 为线段 BC 上(不含端点)任意一点，

所以设 $\overrightarrow{BF}=\lambda\overrightarrow{BC}(0<\lambda<1)$，故 $\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AC}-\lambda\overrightarrow{AB}$，

即 $\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{AC}+(1-\lambda)\overrightarrow{AB}$，

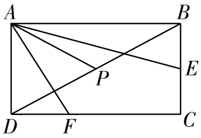
又 $\overrightarrow{AF}=x\overrightarrow{AB}+2y\overrightarrow{AC}(x>0,y>0)$，

所以 $x+2y=1-\lambda+\lambda=1$，

故 $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}=\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}\right)(x+2y)=1+4+\frac{2y}{x}+\frac{2x}{y}\geqslant5+2\sqrt{\frac{2y}{x}\cdot\frac{2x}{y}}=9$，

当且仅当 $\frac{2y}{x}=\frac{2x}{y}$，即 $x=y=\frac{1}{3}$ 时，等号成立，故 $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}$ 的最小值为 9.

7. B 【解析】如图，在矩形 $ABCD$ 中，



已知 E,F 分别是 BC,CD 上的点，且满足 $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{EC},\overrightarrow{CF}=2\overrightarrow{FD}$，

设 $\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{DA}=\boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b},\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}=\frac{1}{3}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，

由 $\begin{cases}\overrightarrow{AE}=\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b},\\ \overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\end{cases}$

可得 $\begin{cases}\boldsymbol{a}=\frac{6}{5}\overrightarrow{AE}-\frac{3}{5}\overrightarrow{AF},\\ \boldsymbol{b}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AE}-\frac{6}{5}\overrightarrow{AF},\end{cases}$

因为点 P 在线段 BD 上运动，则可设 $\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}+(1-t)\overrightarrow{AD},0\leqslant t\leqslant1$，

所以 $\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}+(1-t)\overrightarrow{AD}=t\boldsymbol{a}-(1-t)\boldsymbol{b}$

$=t\left(\frac{6}{5}\overrightarrow{AE}-\frac{3}{5}\overrightarrow{AF}\right)-(1-t)\cdot\left(\frac{2}{5}\overrightarrow{AE}-\frac{6}{5}\overrightarrow{AF}\right)$

$=\left(-\frac{2}{5}+\frac{8t}{5}\right)\overrightarrow{AE}+\left(\frac{6}{5}-\frac{9t}{5}\right)\overrightarrow{AF}$，

又 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AE}+\mu\overrightarrow{AF}(\lambda,\mu\in\mathbf{R})$，

所以 $\lambda=-\frac{2}{5}+\frac{8t}{5},\mu=\frac{6}{5}-\frac{9t}{5}$，

则 $\lambda+\mu=-\frac{2}{5}+\frac{8t}{5}+\frac{6}{5}-\frac{9t}{5}=\frac{4}{5}-\frac{1}{5}t$，

因为 $0\leqslant t\leqslant 1$，所以 $\lambda+\mu=\frac{4}{5}-\frac{1}{5}t\in\left[\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right]$. 故选 B.

8. $\frac{3}{2}$ 【解析】因为 $2\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{FC},\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AE}$,

所以 $\overrightarrow{FB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CB},\overrightarrow{EA}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$.

因为 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}=(\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{FB})+(\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{EA})=\left(\overrightarrow{OF}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}\right)+\left(\overrightarrow{OE}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}\right)=\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OE}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA})=\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OE}-\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$,

所以 $\frac{4}{3}\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}$，即 $\overrightarrow{OC}=\frac{3}{4}\overrightarrow{OE}+\frac{3}{4}\overrightarrow{OF}$，则 $m+n=\frac{3}{4}+\frac{3}{4}=\frac{3}{2}$.

9. (1)【解】因为 $\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{BD}$,

所以 $\overrightarrow{BD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$,

则 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

因为 E 是线段 AD 的中点，所以 $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.

(2)【证明】方法一：因为 M,E,N 三点共线，所以 $\overrightarrow{AE}=k\overrightarrow{AM}+(1-k)\overrightarrow{AN}$.

因为 $\overrightarrow{AM}=m\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AN}=n\overrightarrow{AC}$，所以 $\overrightarrow{AE}=km\overrightarrow{AB}+(1-k)n\overrightarrow{AC}$.

由(1)可知，$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$,

则 $\begin{cases}km=\frac{1}{3},\\(1-k)n=\frac{1}{6},\end{cases}$

所以 $k=\frac{1}{3m}=1-\frac{1}{6n}$，所以 $m+2n=6mn$.

方法二：由 $\overrightarrow{AM}=m\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AN}=n\overrightarrow{AC}$，得 $\overrightarrow{AB}=\frac{\overrightarrow{AM}}{m},\overrightarrow{AC}=\frac{\overrightarrow{AN}}{n}$,

由(1)知，$\overrightarrow{AE}=\frac{\overrightarrow{AM}}{3m}+\frac{\overrightarrow{AN}}{6n}$,

因为 M,E,N 三点共线，所以 $\frac{1}{3m}+\frac{1}{6n}=$

1，所以 $m+2n=6mn$.

(3)【解】因为 $\overrightarrow{AM}=m\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AN}=n\overrightarrow{AC}$，所以 $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=n\overrightarrow{AC}-m\overrightarrow{AB}$.

由(1)可知，$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$，所以 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{MN}=\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}\right)\cdot(n\overrightarrow{AC}-m\overrightarrow{AB})=\frac{1}{6}[n\overrightarrow{AC}^2-2m\overrightarrow{AB}^2+(2n-m)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}]$.

因为 $|\overrightarrow{AB}|=3$，$|\overrightarrow{AC}|=6$，$AB\perp AC$，且 $AE\perp MN$，所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{MN}=0$，所以 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{MN}=6n-3m=0$.

由(2)可知 $m+2n=6mn$，联立 $\begin{cases}6n-3m=0,\\m+2n=6mn,\end{cases}$ 解得 $m=\frac{2}{3}$，$n=\frac{1}{3}$.

10. (1)【解】因为 Q 是 BC 的中点，所以 AQ 是 BC 边上的中线，所以 $\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，

当 $t=\frac{1}{3}$ 时，$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.

(2)【证明】由(1)知 $\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，所以 $\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AQ}=\frac{t}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{t}{2}\overrightarrow{AC}$，

因为 M,P,N 三点共线，所以设 $\overrightarrow{MP}=x\overrightarrow{MN}(0<x<1)$，

所以 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{AM}+x\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AM}+x(\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM})=(1-x)\overrightarrow{AM}+x\overrightarrow{AN}$，

已知 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AN}=\mu\overrightarrow{AC}$，所以 $\overrightarrow{AP}=(1-x)\overrightarrow{AM}+x\overrightarrow{AN}=\lambda(1-x)\overrightarrow{AB}+\mu x\overrightarrow{AC}$，

所以 $\frac{t}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{t}{2}\overrightarrow{AC}=(\lambda-\lambda x)\overrightarrow{AB}+\mu x\overrightarrow{AC}$，

因为 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ 不共线，所以 $\begin{cases}\frac{t}{2}=\lambda-\lambda x,\\\frac{t}{2}=\mu x,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\lambda x=\lambda-\frac{t}{2},\\\mu x=\frac{t}{2},\end{cases}$ 消去 x 整理得 $\frac{t}{\lambda}+\frac{t}{\mu}=2$，

所以$\frac{t}{\lambda}+\frac{t}{\mu}$为定值.

11.【解】(1)由题意得$\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$,

则$\overrightarrow{OF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB})+\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OC}$,

故$\overrightarrow{OD}=t\overrightarrow{OF}=\frac{2t}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2t}{3}\overrightarrow{OC}$.

因为C,D,A三点共线,

所以$\frac{2t}{3}+\frac{2t}{3}=1$,解得$t=\frac{3}{4}$.

(2)由已知得$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$.

因为E是线段BC上(包含端点)的动点,所以令$\overrightarrow{CE}=x\overrightarrow{OA}\left(0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\right)$,

则$\overrightarrow{OB}=\lambda\overrightarrow{CA}+\mu\overrightarrow{OE}=\lambda(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})+\mu(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CE})=(\lambda+\mu x)\overrightarrow{OA}+(\mu-\lambda)\overrightarrow{OC}$.

又$\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA}$不共线,

所以$\begin{cases}\mu-\lambda=1,\\ \lambda+\mu x=\frac{1}{2},\end{cases}$解得$\begin{cases}\lambda=\mu-1,\\ \mu=\frac{3}{2+2x}.\end{cases}$

因为$0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$,

所以$1\leqslant x+1\leqslant\frac{3}{2}$,$1\leqslant\mu\leqslant\frac{3}{2}$,所以$\lambda\cdot\mu=(\mu-1)\mu=\left(\mu-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$.

令$f(\mu)=\left(\mu-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$,$\mu\in\left[1,\frac{3}{2}\right]$,因为函数$f(\mu)$在$\left[1,\frac{3}{2}\right]$上单调递增,所以当$\mu=1$时,$f(\mu)$取最小值,即$(\lambda\cdot\mu)_{\min}=0$;当$\mu=\frac{3}{2}$时,$f(\mu)$取最大值,即$(\lambda\cdot\mu)_{\max}=\frac{3}{4}$.故$\lambda\cdot\mu$的取值范围是$\left[0,\frac{3}{4}\right]$.

12. A　【解析】由$\angle BAC=120^\circ$,$AB=2$,$AC=1$,可得$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times1\times\cos\ 120^\circ=$

-1.

由 $\overrightarrow{BD}=\lambda\overrightarrow{BC}(0<\lambda<1)$,可得 $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\lambda(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$,即 $\overrightarrow{AD}=(1-\lambda)\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}$,

于是 $f(\lambda)=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=[(1-\lambda)\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}]\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\lambda\overrightarrow{AC}^2-(1-\lambda)\cdot\overrightarrow{AB}^2+(1-2\lambda)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\lambda-4(1-\lambda)-(1-2\lambda)=7\lambda-5$,

因为 $0<\lambda<1$,所以 $-5<f(\lambda)<2$. 故选 A.

9.3.2 向量坐标表示与运算+

9.3.3 向量平行的坐标表示

1. D 【解析】因为向量 $\boldsymbol{a}=(2,1)$,$\boldsymbol{b}=(x-1,x)(x>1)$,且 $|\boldsymbol{b}|=\sqrt{5}$,所以 $|\boldsymbol{b}|=\sqrt{5}=\sqrt{(x-1)^2+x^2}$,得 $x=-1$(舍)或 $x=2$,即 $\boldsymbol{b}=(1,2)$,所以 $m\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(2m-1,m-2)$,所以 $(m\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=4m-5=0$,解得 $m=\dfrac{5}{4}$. 故选 D.

2. C 【解析】由题意,得 $\boldsymbol{c}=(2m+n,-3m+2n)=(9,4)$,

所以 $\begin{cases}2m+n=9,\\-3m+2n=4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=2,\\n=5,\end{cases}$ 故 $m+n=7$. 故选 C.

3. C 【解析】依题意可得 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(1,3)-(2,4)=(-1,-1)$,所以 $C(-1,-1)$.

设 $E(x,y)$,则 $3\overrightarrow{EC}=3(-1-x,-1-y)=(-3-3x,-3-3y)$. 因为 $\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{EC}$,

所以 $\begin{cases}-3-3x=-1,\\-3-3y=-1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-\dfrac{2}{3},\\y=-\dfrac{2}{3},\end{cases}$

所以点 E 的坐标为 $\left(-\dfrac{2}{3},-\dfrac{2}{3}\right)$,故选 C.

4. 38 【解析】$\boldsymbol{a}\cdot(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=3\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3(9+4)-2\left(-\dfrac{3}{2}+2\right)=38$.

5. (1) $(6,-42)$ (2) -1 -1

(3) $(0,20)$ $(9,2)$ $(9,-18)$

【解析】由已知得 $\boldsymbol{a}=(5,-5)$,$\boldsymbol{b}=$

$(-6,-3)$，$\boldsymbol{c}=(1,8)$.

(1) $3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{c}=3(5,-5)+(-6,-3)-3(1,8)=(15-6-3,-15-3-24)=(6,-42)$.

(2) $\because m\boldsymbol{b}+n\boldsymbol{c}=(-6m+n,-3m+8n)$，

$\therefore \begin{cases}-6m+n=5,\\-3m+8n=-5,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=-1,\\n=-1.\end{cases}$

$\therefore$ 实数 m 的值为 -1，n 的值为 -1.

(3) 设 O 为坐标原点. $\because \overrightarrow{CM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OC}=3\boldsymbol{c}$，

$\therefore \overrightarrow{OM}=3\boldsymbol{c}+\overrightarrow{OC}=(3,24)+(-3,-4)=(0,20)$，$\therefore M(0,20)$.

又 $\because \overrightarrow{CN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OC}=-2\boldsymbol{b}$，

$\therefore \overrightarrow{ON}=-2\boldsymbol{b}+\overrightarrow{OC}=(12,6)+(-3,-4)=(9,2)$，

$\therefore N(9,2)$. $\therefore \overrightarrow{MN}=(9,-18)$.

6. $5-\sqrt{6}$ 【解析】$\because \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(-1,2)\cdot(x,2)=4-x$，$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{5}$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{x^2+4}$，

$\therefore \cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\dfrac{4-x}{\sqrt{5}\times\sqrt{x^2+4}}=\dfrac{1}{5}$，

解得 $x=5-\sqrt{6}$.

7. $[0,2]$ 【解析】依题意，以 A 为坐标原点，AB 所在直线为 x 轴，建立如图所示的平面直角坐标系. 设 $P(\cos\theta,\sin\theta)$，其中 $0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{3}$，由题意可知，$A(0,0)$，$D\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$E(1,0)$，$F\left(\dfrac{7}{4},\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$，

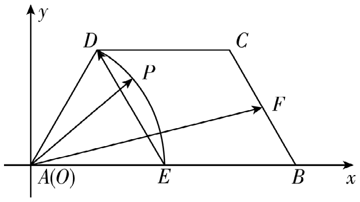
则 $\overrightarrow{AP}=(\cos\theta,\sin\theta)$，$\overrightarrow{ED}=\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overrightarrow{AF}=\left(\dfrac{7}{4},\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

因为 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{ED}+\mu\overrightarrow{AF}$，所以 $(\cos\theta,\sin\theta)=\lambda\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)+\mu\left(\dfrac{7}{4},\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$，

则 $\begin{cases}\cos\theta=-\dfrac{1}{2}\lambda+\dfrac{7}{4}\mu,\\ \sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\lambda+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\mu,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}\lambda=\dfrac{7\sqrt{3}}{12}\sin\theta-\dfrac{1}{4}\cos\theta,\\ \mu=\dfrac{\sqrt{3}}{6}\sin\theta+\dfrac{1}{2}\cos\theta,\end{cases}$

所以 $2\lambda+\mu=\frac{4\sqrt{3}}{3}\sin\theta$. 又 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{3}$,所以 $2\lambda+\mu=\frac{4\sqrt{3}}{3}\sin\theta\in[0,2]$,故 $2\lambda+\mu$ 的取值范围是$[0,2]$.



8.【解】设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2)$, $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2)$, $\boldsymbol{c}=(c_1,c_2)$,

则 $a_1=|\boldsymbol{a}|\cos 45°=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$,

$a_2=|\boldsymbol{a}|\sin 45°=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$,

$b_1=|\boldsymbol{b}|\cos 120°=3\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2}$,

$b_2=|\boldsymbol{b}|\sin 120°=3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$,

$c_1=|\boldsymbol{c}|\cos(-30°)=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$,

$c_2=|\boldsymbol{c}|\sin(-30°)=4\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-2$.

所以 $\boldsymbol{a}=(\sqrt{2},\sqrt{2})$, $\boldsymbol{b}=\left(-\frac{3}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$, $\boldsymbol{c}=(2\sqrt{3},-2)$.

9. A【解析】$\because |\boldsymbol{a}|=4$, $\therefore$ 由题意可得 $4m=4$,解得 $m=1$,即$\boldsymbol{b}=(1,1)$,

$\therefore \cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{4}{4\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\because \langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\in[0,\pi]$,

$\therefore \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为$\frac{\pi}{4}$. 故选 A.

10. D【解析】$\because \boldsymbol{a}=(1,2)$, $\boldsymbol{b}=(m,3)$,

$\therefore 2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(2-m,1)$. 又$\because \boldsymbol{a}\perp(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$,

$\therefore 2-m+2=0$,解得 $m=4$. 则 $\boldsymbol{b}=(4,3)$,故 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{10}{\sqrt{5}\times5}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$. 故选 D.

11. C【解析】由题意得 $m^2=3$,解得 $m=\pm\sqrt{3}$.

又 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向共线，故 $m=-\sqrt{3}$，此时 $\boldsymbol{a}-\sqrt{3}\boldsymbol{b}=(-2\sqrt{3},6)$，

故 $|\boldsymbol{a}-\sqrt{3}\boldsymbol{b}|=\sqrt{(-2\sqrt{3})^2+6^2}=4\sqrt{3}$.

故选 C.

12. ACD 【解析】对于 A，若 $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{BC}$，则 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$ 共线且 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 有公共点 B，所以 A,B,C 三点共线，故 A 正确；对于 B，因为 $\frac{2}{2}\neq\frac{-1}{4}$，所以 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ 不共线，故 B 错误；对于 C，若 $\overrightarrow{OB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OC}$，则 $\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OC}$，即 $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{BC}$，且 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 有公共点 B，则 A,B,C 三点共线，故 C 正确；

对于 D，若 $\overrightarrow{AB}=(1,-2)$，$\overrightarrow{AC}=(2,-4)$，则 $\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，且 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 有公共点 A，则 A,B,C 三点共线，故 D 正确. 故选 ACD.

13. A 【解析】向量 $\boldsymbol{a}=(2,-1)$，$\boldsymbol{b}=(4,-4)$，则 $m\boldsymbol{a}-n\boldsymbol{b}=(2m-4n,4n-m)$，$2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(0,2)$.

由 $m\boldsymbol{a}-n\boldsymbol{b}$ 与 $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 共线，得 $m-2n=0$，$\therefore\frac{m}{n}=2$. 故选 A.

14. ACD 【解析】$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\lambda-2$，由 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 得 $-2\lambda=1$，解得 $\lambda=-\frac{1}{2}$.

当 $\lambda>2$ 时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>0$，$\theta$ 为锐角，故 A 正确；

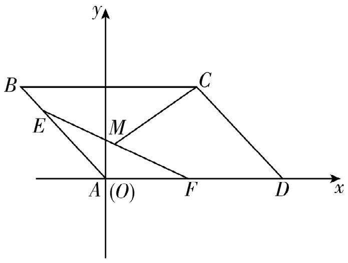
当 $\lambda<2$ 时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$，当 $\lambda=-\frac{1}{2}$ 时，θ 为平角，故 B 错误；

当 $\lambda=2$ 时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，$\theta$ 为直角，故 C 正确；

因为当 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 时，$\lambda=-\frac{1}{2}$，此时 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为平角，故不存在 λ，使得 θ 为零角，故 D 正确. 故选 ACD.

15. D 【解析】根据题意，以 A 为坐标

原点，AD 所在直线为 x 轴建立如图所示的平面直角坐标系，$AB=\sqrt{2}$，$AD=2$，$\angle BAD=135°$，则 $B(-1,1)$，$D(2,0)$，$C(1,1)$.



由 $\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AB}=\lambda(-1,1)=(-\lambda,\lambda)$，得 $E(-\lambda,\lambda)$.

由 $\overrightarrow{AF}=\mu\overrightarrow{AD}=\mu(2,0)=(2\mu,0)$，得 $F(2\mu,0)$.

$\therefore M\left(\dfrac{2\mu-\lambda}{2},\dfrac{\lambda}{2}\right)$. $\because 2\lambda+\mu=1$，

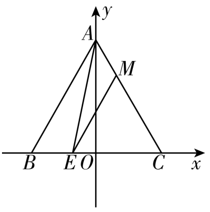
$\therefore CM^2=\left(\dfrac{2\mu-\lambda}{2}-1\right)^2+\left(\dfrac{\lambda}{2}-1\right)^2=$

$\dfrac{1}{2}(13\lambda^2-2\lambda+2)$，

当 $\lambda=\dfrac{1}{13}$时，$|\overrightarrow{MC}|$取到最小值，此时

$\mu=\dfrac{11}{13}$，故$\dfrac{\mu}{\lambda}=11$，故选 D.

16. A 【解析】因为$\triangle ABC$ 是边长为 $2\sqrt{3}$的正三角形，所以以线段 BC 的中点 O 为坐标原点，BC，OA 所在直线分别为 x 轴、y 轴建立如图所示的平面直角坐标系，



则 $A(0,3)$，$C(\sqrt{3},0)$，设 $E(a,0)$，则 $-\sqrt{3}\leqslant a\leqslant\sqrt{3}$，

由 $3\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}$ 得 $M\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},2\right)$，则 $\overrightarrow{EA}=(-a,3)$，$\overrightarrow{EM}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}-a,2\right)$，

所以 $\overrightarrow{EM}\cdot\overrightarrow{EA}=-a\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}-a\right)+6=$

$\left(a-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2+\frac{71}{12}$.

因为$-\sqrt{3}\leqslant a\leqslant\sqrt{3}$,所以当 $a=\frac{\sqrt{3}}{6}$时,

$(\overrightarrow{EM}\cdot\overrightarrow{EA})_{\min}=\frac{71}{12}$;当 $a=-\sqrt{3}$ 时,

$(\overrightarrow{EM}\cdot\overrightarrow{EA})_{\max}=10$,

所以 $\overrightarrow{EM}\cdot\overrightarrow{EA}\in\left[\frac{71}{12},10\right]$.

故选 A.

17. $[8,10]$ 【解析】以 A 为坐标原点,AB,AD 所在直线分别为 x,y 轴,建立如图所示的平面直角坐标系,则$A(0,0)$,$B(6,0)$,$C(6,4)$,$D(0,4)$,

设 $P(s,4)$,因为 $\overrightarrow{DP}=\lambda\overrightarrow{DC}$,所以$(s,0)=\lambda(6,0)$,即 $s=6\lambda$,故 $P(6\lambda,4)$,

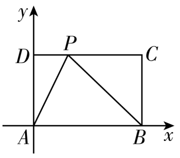
$\lambda\in\left[0,\frac{2}{3}\right]$,

则 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=(-6\lambda,-4)+(6-6\lambda,-4)=(6-12\lambda,-8)$,

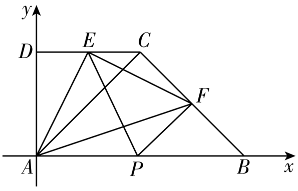
$|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|=\sqrt{(6-12\lambda)^2+64}$,

因为 $\lambda\in\left[0,\frac{2}{3}\right]$,

所以 $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|=\sqrt{(6-12\lambda)^2+64}=\sqrt{144\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)^2+64}\in[8,10]$.



18.【解】(1)如图,以 A 为原点,AB 所在直线为 x 轴,AD 所在直线为 y 轴,建立平面直角坐标系,



$\therefore A(0,0)$,设 $D(0,y_0)$ $(y_0>0)$,

则 $E(1,y_0)$,$C(2,y_0)$,$F\left(3,\frac{y_0}{2}\right)$,

$\therefore\overrightarrow{AC}=(2,y_0)$,$\overrightarrow{EF}=\left(2,-\frac{y_0}{2}\right)$,

由 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{EF}=2$，得 $4-\frac{y_0^2}{2}=2$，即 $y_0^2=4$，又 $y_0>0$，$\therefore y_0=2$，

$\therefore AD=2$.

(2) 由(1)知 $E(1,2)$，$F(3,1)$，$\overrightarrow{AE}=(1,2)$，$\overrightarrow{AF}=(3,1)$，

$\therefore \cos\angle EAF=\frac{\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}}{|\overrightarrow{AE}||\overrightarrow{AF}|}=\frac{5}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

又 $\angle EAF$ 为锐角，

$\therefore \angle EAF=\frac{\pi}{4}$.

(3) 设 $P(x_0,0)(0\leqslant x_0\leqslant 4)$，$\therefore \overrightarrow{PE}=(1-x_0,2)$，$\overrightarrow{PF}=(3-x_0,1)$，

$\therefore \overrightarrow{PE}+\overrightarrow{PF}=(4-2x_0,3)$，$\overrightarrow{PA}=(-x_0,0)$，

$\therefore (\overrightarrow{PE}+\overrightarrow{PF})\cdot\overrightarrow{PA}=(4-2x_0,3)\cdot(-x_0,0)=(4-2x_0)\cdot(-x_0)=2x_0^2-4x_0=2(x_0-1)^2-2$，

$\because 0\leqslant x_0\leqslant 4$，$\therefore (\overrightarrow{PE}+\overrightarrow{PF})\cdot\overrightarrow{PA}\in[-2,16]$.

19. D 【解析】由已知不妨设 $A(0,0)$，$B(1,0)$，$C(c,0)$，$D(d,0)$，

由 C,D 调和分割 A,B 可知，$(c,0)=\lambda(1,0)$，$(d,0)=\mu(1,0)$，所以 $\lambda=c$，$\mu=d$，

代入 $\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}=2$ 得 $\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=2(*)$.

对于 A，B，若 C 是线段 AB 的中点，则 $c=\frac{1}{2}$，代入$(*)$可知 d 不存在，故 C 不可能是线段 AB 的中点，同理 D 也不可能是线段 AB 的中点，故 A，B 错误；

对于 C，若 C,D 同时在线段 AB 上，则 $0\leqslant c\leqslant 1$，$0\leqslant d\leqslant 1$，若满足 $\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=2$，则 $c=d=1$，此时点 C 和点 D 重合，与已知矛盾，故 C 错误；

对于 D，若 C,D 同时在线段 AB 的延

长线上，则 $c>1,d>1$，则 $\frac{1}{c}+\frac{1}{d}<2$，这与 $\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=2$ 矛盾，所以 C,D 不可能同时在线段 AB 的延长线上，故 D 正确. 故选 D.

9.4 向量应用

1. ACD 【解析】设三角形的重心为 G，连接 AG,BG，则 $\overrightarrow{BG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})$，$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，

因为 $|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}|=6$，$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=3$，

所以 $|\overrightarrow{BG}|=\frac{1}{3}\cdot|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}|=2$，$|\overrightarrow{AG}|=\frac{1}{3}\cdot|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=1$，

又 $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AB}=0$，即 $3\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，可得 $AB\perp AG$，

则 $AB=\sqrt{BG^2-AG^2}=\sqrt{3}$，故 A 正确；

因为 $AB\perp AG$，$\angle BAC>\frac{\pi}{2}>\frac{\pi}{3}$，故 B 错误；

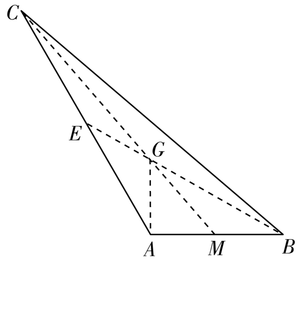
设 AC 的中点为 E，连接 BE，因为 G 是三角形的重心，所以 G 是线段 BE 上靠近 E 的三等分点，

故 $\overrightarrow{BG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BE}$，$S_{\triangle ABC}=2S_{\triangle ABE}=3S_{\triangle ABG}=\frac{3}{2}AB\cdot AG=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，故 C 正确；

设 AB 的中点为 M，连接 CM，同理，G 是线段 CM 上靠近 M 的三等分点，所以有 $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{CM}=6\overrightarrow{GM}$，

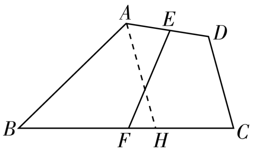
而 $|\overrightarrow{GM}|=\sqrt{|\overrightarrow{MA}|^2+|\overrightarrow{AG}|^2}=\frac{\sqrt{7}}{2}$，

故 $|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}|=6\cdot|\overrightarrow{GM}|=3\sqrt{7}$，故 D 正确. 故选 ACD.



2. $\dfrac{\sqrt{19}}{2}$ 【解析】作 $AH/\!/CD$，交 BC 于点 H，则 $\angle BHA=\angle BCD=75°$，

$\therefore \angle BAH=180°-45°-75°=60°$，则 $\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}\rangle=\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AH}\rangle=\cos\angle BAH=\dfrac{1}{2}$.



$\because \overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}$，$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CF}$，

又 $\overrightarrow{EA}=-\overrightarrow{ED}$，$\overrightarrow{BF}=-\overrightarrow{CF}$，

$\therefore 2\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$，

$\therefore |\overrightarrow{EF}|^2=\dfrac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})^2=\dfrac{1}{4}|\overrightarrow{AB}|^2+\dfrac{1}{4}|\overrightarrow{DC}|^2+\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{DC}|\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}\rangle=\dfrac{9}{4}+1+\dfrac{3}{2}=\dfrac{19}{4}$，

$\therefore |\overrightarrow{EF}|=\dfrac{\sqrt{19}}{2}$.

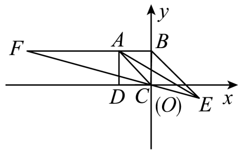
3.【证明】设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{m}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{n}$，

由 $\dfrac{CE}{ED}=\dfrac{AF}{FB}=\dfrac{1}{2}$，知 E 是线段 CD 上靠近点 C 的三等分点，F 是线段 AB 上靠近点 A 的三等分点，所以 $\overrightarrow{FO}=\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AO}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}=-\dfrac{1}{3}\boldsymbol{m}+\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n})=\dfrac{1}{6}\boldsymbol{m}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{n}$，

$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CE}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{CD}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n})-\dfrac{1}{3}\boldsymbol{m}=\dfrac{1}{6}\boldsymbol{m}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{n}$，所以 $\overrightarrow{FO}=\overrightarrow{OE}$.

又 O 为 $\overrightarrow{FO}$ 和 $\overrightarrow{OE}$ 的公共点，所以点 E,O,F 在同一直线上.

4.【证明】以 C 为坐标原点，建立如图所示的平面直角坐标系. 设正方形的边长为 1，则点 A,B 的坐标分别为 $(-1,1)$ 和 $(0,1)$. 设点 E 的坐标为 (x,y) $(x>0,y<0)$，则 $\overrightarrow{BE}=(x,y-1)$，$\overrightarrow{AC}=(1,-1)$.



$\because \overrightarrow{BE}/\!/\overrightarrow{AC}$,

$\therefore x\times(-1)-1\times(y-1)=0.$ ①

又由 $AC=CE$ 及 $A(-1,1)$,$C(0,0)$,$E(x,y)$,

可得 $x^2+y^2=2.$ ②

由①②可得 $E\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2},\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$.

设 $F(x_1,1)$,则由 $\overrightarrow{CF}=(x_1,1)$ 和 $\overrightarrow{CE}=\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2},\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$ 共线得,

$\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}x_1-\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}=0$,

解得 $x_1=-2-\sqrt{3}$,

$\therefore$ 点 F 的坐标为$(-2-\sqrt{3},1)$.

$\because \overrightarrow{AF}=(-1-\sqrt{3},0)$,$\overrightarrow{AE}=\left(\dfrac{3+\sqrt{3}}{2},\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)$,

$\therefore |\overrightarrow{AF}|=|\overrightarrow{AE}|=\sqrt{3}+1$,$\therefore AF=AE$.

5. (1)【**解**】因为 $\overrightarrow{BM}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{MC}$,则 $\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AM})$,所以 $\overrightarrow{AM}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$,

因为$|\overrightarrow{AB}|=2$,$|\overrightarrow{AC}|=4$,$\angle BAC=60°$,

由平面向量数量积的定义可得 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cos 60°=2\times4\times\dfrac{1}{2}=4$,

所以$|\overrightarrow{AM}|=\left|\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}\right|$

$=\dfrac{1}{4}\sqrt{(3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})^2}$

$=\dfrac{1}{4}\sqrt{9\overrightarrow{AB}^2+6\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}^2}$

$=\dfrac{1}{4}\sqrt{9\times4+6\times4+16}=\dfrac{\sqrt{19}}{2}$.

(2)【**证明**】因为 N 为线段 AB 的中点,

则 $\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$,

由平面向量数量积的定义可得 $\overrightarrow{AB}\cdot$

$\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cos\theta=2\times4\times\frac{1}{4}=2$,

所以 $\overrightarrow{CN}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=$

$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\times2^2-2=0$,

又因为 $\overrightarrow{CN},\overrightarrow{AB}$ 均为非零向量,

故 $\overrightarrow{CN}\perp\overrightarrow{AB}$,即 $CN\perp AB$.

(3)【解】因为点 P 在线段 NC 上,设 $\overrightarrow{NP}=\lambda\overrightarrow{NC}$,其中 $0\leqslant\lambda\leqslant1$,

则 $\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AN}=\lambda(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AN})$,所以 $\overrightarrow{AP}=(1-\lambda)\overrightarrow{AN}+\lambda\overrightarrow{AC}=\frac{1-\lambda}{2}\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}$,

又因为 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$,且 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ 不共线,

所以 $\begin{cases}\frac{1-\lambda}{2}=\frac{1}{4},\\ \lambda=\frac{1}{2},\end{cases}$ 解得 $\lambda=\frac{1}{2}$,此时,点 P 为线段 NC 的中点.

6. A 【解析】因为 $|\boldsymbol{F}|=50$ 且 $\boldsymbol{F}$ 与小车的位移方向的夹角为 $60°$,又力 $\boldsymbol{F}$ 作用于小车 G,使小车 G 发生了 40 米的位移,所以力 $\boldsymbol{F}$ 做的功为 $W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos60°=50\times40\times\frac{1}{2}=1\ 000$ J.

故选 A.

7. A 【解析】因为两个力 $\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2$ 的夹角为 $\frac{\pi}{2}$,所以 $\boldsymbol{F}_1\cdot\boldsymbol{F}_2=0$. 又因为它们的合力大小为 10 N,合力与 $\boldsymbol{F}_1$ 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$,所以 $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{(\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2)\cdot\boldsymbol{F}_1}{|\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2||\boldsymbol{F}_1|}=\frac{|\boldsymbol{F}_1|}{10}$,

解得 $|\boldsymbol{F}_1|=5\sqrt{2}$ N. 故选 A.

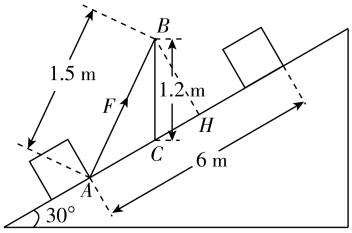
8. AC 【解析】设水的阻力为 $\boldsymbol{f}$,绳子的拉力为 $\boldsymbol{F}$,$\boldsymbol{F}$ 与水平方向的夹角为 θ,$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,则有 $|\boldsymbol{F}|\cos\theta=|\boldsymbol{f}|$,所以 $|\boldsymbol{F}|=\frac{|\boldsymbol{f}|}{\cos\theta}$,因为 θ 增大,$\cos\theta$ 减小,所以 $|\boldsymbol{F}|$ 增大,$|\boldsymbol{F}|\sin\theta$ 增大,$|\boldsymbol{F}|\sin\theta$

加上浮力等于船的重力,所以船的浮力减小. 故选 AC.

9. B 【解析】如图,设 A 为重物上一点,B 为拖拉点,C 为斜面上距拖拉点竖直高度为 1.2 m 的点,则在$\triangle ABC$ 中,易得$\angle BCA=120°$,过点 B 作 $BH\perp AC$ 于点 H,则$\angle BCH=60°$,$\sin 60°=\dfrac{BH}{BC}$,

$BH=\dfrac{3\sqrt{3}}{5}$,在 Rt$\triangle BAH$ 中,$\sin\angle BAC=\dfrac{BH}{BA}$,则$\sin\angle BAC=\dfrac{2\sqrt{3}}{5}\Rightarrow\cos\angle BAC=\dfrac{\sqrt{13}}{5}$,

所以 $W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}=30\sqrt{13}$(J). 故选 B.



10.【解】(1)由题设得,$\boldsymbol{v}_1$ 在 $\boldsymbol{v}_2$ 反方向上的分速度大小为$|\boldsymbol{v}_1|\cdot\cos 60°=5(km/h)>|\boldsymbol{v}_2|=4$(km/h),

∴ 游船航行到达北岸的位置是在 A' 的西侧.

(2)要使游船能到达 A'处,则 $\boldsymbol{v}_1$ 在 $\boldsymbol{v}_2$ 反方向上的分速度大小为$|\boldsymbol{v}_1|\cdot\cos(180°-\theta)=|\boldsymbol{v}_2|=4$(km/h),

∴ $\cos(180°-\theta)=\dfrac{2}{5}$,故 $\cos\theta=-\dfrac{2}{5}$.

又$0°<\theta<180°$,此时 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\dfrac{\sqrt{21}}{5}$,

∴ $\boldsymbol{v}_1$ 在南北方向上的分速度大小为$|\boldsymbol{v}_1|\sin(\pi-\theta)=2\sqrt{21}$(km/h),

∴ 所需时间 $t=\dfrac{d}{2\sqrt{21}}=\dfrac{\sqrt{21}}{42}$(h).

(3)由(1)知游船航行时间为$\dfrac{d}{|\boldsymbol{v}_1|\sin 60°}=\dfrac{\sqrt{3}}{15}$(h),

∴ 水平方向航行距离为($|\boldsymbol{v}_1|\cdot$

$\cos 60°-|\boldsymbol{v}_2|)\times\frac{\sqrt{3}}{15}=\frac{\sqrt{3}}{15}$(km),

∴ 游船航行到达北岸的实际航程为

$\sqrt{1^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{15}\right)^2}=\frac{2\sqrt{57}}{15}$(km).

11.【解】方法一(基底法):(1)由题知

$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$,

$\therefore \overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{CD}=\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)$

$=\frac{2}{9}\overrightarrow{AB}^2-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{1}{9}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}^2$

$=\frac{2}{9}\overrightarrow{AB}^2-\frac{5}{9}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}^2$

$=\frac{2}{9}\times4+\frac{5}{9}\times2\times4\times\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\times16=-\frac{20}{9}$.

(2)假设点 P 存在,设 $\overrightarrow{CP}=\lambda\overrightarrow{CB}$, $0\leqslant\lambda\leqslant1$,

$\therefore \overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{AC}+\lambda\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AC}+\lambda(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=\lambda\overrightarrow{AB}+(1-\lambda)\overrightarrow{AC}$,

$\because CD\perp AP$, $\therefore \overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AP}=0$,

由(1)可知 $\overrightarrow{CD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$,

$\therefore \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)\cdot[\lambda\overrightarrow{AB}+(1-\lambda)\overrightarrow{AC}]=\frac{1}{3}\lambda\overrightarrow{AB}^2-(1-\lambda)\overrightarrow{AC}^2+\left(\frac{1}{3}-\frac{4}{3}\lambda\right)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{4}{3}\lambda-16+16\lambda-\frac{4}{3}+\frac{16}{3}\lambda=0$,解得 $\lambda=\frac{13}{17}$,

∴ 存在一点 P,使得 $CD\perp AP$,此时 $\frac{CP}{CB}=\frac{13}{17}$.

(3)由(1)知 $\overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$,

$\therefore \overrightarrow{AE}^2=\frac{4}{9}\overrightarrow{AB}^2+\frac{1}{9}\overrightarrow{AC}^2+2\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{16}{9}+\frac{16}{9}-2\times\frac{2}{9}\times4\times2\times\frac{1}{2}=\frac{16}{9}$，$\therefore|\overrightarrow{AE}|=\frac{4}{3}$，

$\because\overrightarrow{OC}+2\overrightarrow{OB}+m\overrightarrow{OA}=\mathbf{0}(m>0)$

$\therefore\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{EC}+2(\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{EB})+m\overrightarrow{OA}=\mathbf{0}$，

$\therefore3\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{EC}+2\overrightarrow{EB}+m\overrightarrow{OA}=\mathbf{0}$，

$\therefore3\overrightarrow{OE}+m\overrightarrow{OA}=\mathbf{0}$，$-m\overrightarrow{OA}=3\overrightarrow{OE}$，

$\therefore O,A,E$ 三点共线，且 O 在 A,E 中间，$|\overrightarrow{OA}|+|\overrightarrow{OE}|=|\overrightarrow{AE}|=\frac{4}{3}$，

$\therefore-m|\overrightarrow{OA}|^2=3\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{OA}=-3|\overrightarrow{OE}|\cdot|\overrightarrow{OA}|\geqslant-3\cdot\left(\frac{|\overrightarrow{OE}|+|\overrightarrow{OA}|}{2}\right)^2=-3\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=-\frac{4}{3}$，

当且仅当 $|\overrightarrow{OE}|=|\overrightarrow{OA}|=\frac{2}{3}$，即 O 为 AE 的中点时等号成立，

而 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OC}+2\overrightarrow{OB})=-m\overrightarrow{OA}^2$，

$\therefore\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ 的最小值为 $-\frac{4}{3}$.

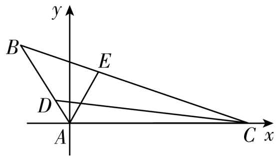
方法二（坐标法）：(1) 以 A 为坐标原点，AC 所在直线为 x 轴建立如图所示的平面直角坐标系，

则 $A(0,0)$，$B(-1,\sqrt{3})$，$C(4,0)$，$E\left(\frac{2}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$，$D\left(-\frac{1}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$，$\overrightarrow{AE}=\left(\frac{2}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$，$\overrightarrow{CD}=\left(-\frac{13}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$，$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{CD}=-\frac{2}{3}\times\frac{13}{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=-\frac{20}{9}$.

(2) 假设点 P 存在，设 $\overrightarrow{CP}=\lambda\overrightarrow{CB}=\lambda(-5,\sqrt{3})=(-5\lambda,\sqrt{3}\lambda)$，$0\leqslant\lambda\leqslant1$，

$\therefore\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CP}=(4,0)+(-5\lambda,\sqrt{3}\lambda)=(4-5\lambda,\sqrt{3}\lambda)$，

$\therefore\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{CD}=-\frac{13}{3}(4-5\lambda)+\frac{\sqrt{3}}{3}\times\sqrt{3}\lambda=-\frac{52}{3}+\frac{68}{3}\lambda=0$



解得 $\lambda=\frac{13}{17}$，∴ 存在一点 P，使得 $CD\perp AP$，此时 $\frac{CP}{CB}=\frac{13}{17}$.

(3) 设 $O(x,y)$，

$\overrightarrow{OC}+2\overrightarrow{OB}+m\overrightarrow{OA}=(4-x,-y)+2(-1-x,\sqrt{3}-y)+m(-x,-y)=(2-3x-mx,2\sqrt{3}-3y-my)=\mathbf{0}$，

∴ $2-3x-mx=0$，$2\sqrt{3}-3y-my=0$，

即 $x=\frac{2}{m+3}$，$y=\frac{2\sqrt{3}}{m+3}$，

∴ $O\left(\frac{2}{m+3},\frac{2\sqrt{3}}{m+3}\right)$，

又 $\overrightarrow{OC}+2\overrightarrow{OB}+m\overrightarrow{OA}=\mathbf{0}(m>0)\Rightarrow\overrightarrow{OC}+2\overrightarrow{OB}=-m\overrightarrow{OA}$，∴ $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OC}+2\overrightarrow{OB})=-m\overrightarrow{OA}^2=-m\left[\frac{4}{(3+m)^2}+\frac{12}{(3+m)^2}\right]=\frac{-16m}{(m+3)^2}=-\frac{16}{m+\frac{9}{m}+6}$，

∵ $m>0$，∴ $m+\frac{9}{m}\geqslant2\sqrt{9}=6$，

$-m\overrightarrow{OA}^2\geqslant-\frac{4}{3}$，

当且仅当 $m=3$ 时等号成立，此时 $\overrightarrow{AO}=\left(\frac{1}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$，即 O 为 AE 的中点，

∴ $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ 的最小值为 $-\frac{4}{3}$.